

垂直气流中大气污染物输送扩散的解析模式

施 介 宽

(兰 州 大 学)

一、引 言

传统的高斯扩散模式适用于垂直气流可忽略的大气污染物散布问题中,这在平原地区近似可以满足。但是在复杂地形区域,局地气流经常含有明显的垂直分量。作者及其同事们^[1]针对河谷盆地城市兰州1980年冬季进行的大气野外试验,指出了垂直气流的存在,明确地认识到这种垂直气流将明显地影响高架源大气污染物的散布;特别是在下沉气流中,地面污染将增大1—2个量级。

Overcamp^[2]提出的烟云下倾模式可近似地描述垂直气流中高架源烟云污染物的分布。该模式使用有效烟云高度:

$$h' = h - w \frac{x}{u} \quad (1)$$

来代替真实源高。这儿, h 为源高, w 为平均下沉气流速度, u 为平均风速, x 为下风距离。这样,高斯模式就修改为:

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right] \cdot \left\{ \exp\left[-\frac{\left(z - h + \frac{w}{u}x\right)^2}{2\sigma_z^2}\right] + \exp\left[-\frac{\left(z + h - \frac{w}{u}x\right)^2}{2\sigma_z^2}\right] \right\} \quad (2)$$

这个模式对 $h' > 0$, 即 $\frac{w}{u}x < h$ 的近处, 基本正确, 但在 $\frac{w}{u}x > h$ 以后, 将会产生越来

越大的误差。这是因为按照物理本质, 烟云由于下沉速度 w 的作用, 逐渐接近地面, 在靠近地面处, 由于地面的阻挡, 烟云不能进入地下, 同时由于下沉气流的存在, 烟云也难于明显扬起而远离地面。因而在某一下风距离以后, 就近似于一个地面源。但是公式(1)、(2)没有反映这个本质, 在远处, h' 变成负值, 好像烟云进入了地下, 或者说, 由于地面全反射而扬起到了空中, 这时用公式(2)估算的浓度将会产生严重的误差, 是完全不可相信的。

本文试图从原始扩散方程出发, 正确地考虑边界条件, 从而获得解析解, 进而与野外实验结果相比较。

二、解析解的获得

考虑垂直运动速度 w 以后的定常条件下的大气平流扩散方程为:

$$u \frac{\partial c}{\partial x} - w \frac{\partial c}{\partial z} = k_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (3)$$

这儿定义向下垂直速度为正值, 边界条件为:

$$c(0, y, z) = \frac{Q}{u} \delta(y) \delta(z - h) \quad (4)$$

$$c(x, \pm\infty, z) = 0 \quad (5)$$

$$c(x, y, \infty) = 0 \quad (6)$$

$$k_z \frac{\partial c}{\partial z} + wc = 0 \quad \text{在 } z = 0 \text{ 处} \quad (7)$$

这儿, x 坐标沿顺风向, k_y 和 k_z 分别为横风向和铅直向的涡旋扩散率, δ 表示 δ 函数, u 、 w 和 c 均为平均量, 其它符号都是通用的。边界条件(7)是表示在铅直扩散和垂直气流共同作用下, 烟云不能穿越地面的条件。

对这样的微分方程,经常使用分离变量解法,令:

$$c(x, y, z) = c_1(x, y)c_2(x, z) \cdot \exp[-f(z-h)]\exp[-gx] \quad (8)$$

这儿 f, g 为待定系数. 考虑到常用的扩散参数:

$$\sigma_y^2 = 2ky \frac{x}{u} \quad (9)$$

$$\sigma_z^2 = 2kz \frac{x}{u} \quad (10)$$

可以得解:

$$\begin{aligned} c(x, y, z) = & \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right] \\ & \cdot \exp\left[-\frac{wx}{u\sigma_z^2}(z-h)\right] \\ & \cdot \exp\left[-\frac{w^2x^2}{2u^2\sigma_z^2}\right] \\ & \cdot \left\{ \exp\left[-\frac{(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right] \right. \\ & + \exp\left[-\frac{(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right] \\ & + \frac{\sqrt{2\pi}wx}{u\sigma_z} \exp\left[\frac{w^2x^2}{2u^2\sigma_z^2}\right] \\ & \left. - \frac{wx}{u\sigma_z^2}(z+h) \right\} \\ & \cdot \operatorname{erfc}\left[\frac{(z+h)}{\sqrt{2}\sigma_z} - \frac{wx}{\sqrt{2}u\sigma_z}\right] \end{aligned} \quad (11)$$

这儿 erfc 为余误差函数.

三、模式计算与野外实验的比较

兰州大学等单位于 1980 年冬在兰州进行了大气扩散试验^[1], 实验结果与水平流场中的传统高斯模式相差甚远, 在下午的中性层结下, 实验监测的地面浓度比理论模式要高出 1—2 个量级. 从同时的双点测风、平衡气球和定高气球资料, 均表明在这段时间的兰州河谷盆地内有明显的下沉气流; 黄建国

等^[3]分析扩散试验的空中垂直采样资料也确认了烟云有下沉. 这些下沉现象主要发生在从源点到 2km 的范围之内, 这是由于兰州的特定地形结构所形成的. 为此我们可用本文的模式来估算 1 和 2km 的地面污染浓度, 并与实验结果相比较.

首先从下午近中性条件下试验的下风 1 和 2km 的垂直采样中选取烟云有明显下沉的作为比较的个例, 共计 10 次 (见表 1). 确定该下风距离 x 处的烟羽中心线高度, 用源高减去这高度得烟云下沉厚度 Δh , 从而得从源到该下风距离处的平均下沉速度为:

$$w = \frac{\Delta h}{x} u_s \quad (12)$$

这儿 u_s 为源高到烟云中心高度的平均风速.

由文献[1]和[3]的结果, 取扩散参数为:

$$\sigma_y = 13.02x^{0.4058} \quad (13)$$

$$\sigma_z = 7.56x^{0.40} \quad (14)$$

u 取地面到源高的平均风速.

为了比较的方便, 源强 Q 化为归一化释放率 1g/s . 计算结果采用 m^3/m^3 单位, 对试验示踪剂 SF_6 (分子量为 146), 在外界环境 (气压 $\bar{p} = 850\text{hPa}$, 温度 $\bar{T} = 0^\circ\text{C}$) 下, 浓度的转换关系为: $1\text{g}/\text{m}^3$ 相当于 $1.8290 \times 10^{-4}\text{m}^3/\text{m}^3$.

用公式(11)计算列表各次试验的相应下风距离上的地面 (1.5m) 峰值 ($y = 0$) 浓度 $c_{\text{计}}$ (表 1), 表中还对应的列出了实测浓度 $c_{\text{实}}$. 从该表看出, 计算浓度与实测浓度在量级上是一样的, 70% 的数值相差不到一倍, 说明本模式的估算精度是相当高的.

至于有些数据相差大些, 这是由野外试验的精度所造成, 主要有三个原因:

(1) 垂直采样点高度间隔为 100m 左右, 因此仅从有限的几个高度中挑取烟云中心位置是有明显误差的, 它使得计算浓度偏高或偏低;

(2) 实测的地面浓度取自地面采样弧线上的最大浓度, 而采样点对源点所张角度的

表 1 模式计算与实验结果比较

序号	试验日期	试验时间	释放高度 (m)	下风距离 (km)	烟轴高度 (m)	$w(m/s)$	$u(m/s)$	$c_{计} \left(\frac{m^3}{m^3} \right)$	$c_{实} \left(\frac{m^3}{m^3} \right)$
1	80.12.31	15:40	390	2	210	0.099	0.7	1.2×10^{-9}	1.5×10^{-9}
2	81.1.2	14:40	390	2	375	0.020	1.6	7.0×10^{-11}	$< 1.0 \times 10^{-11}$
3	81.1.9	14:40	390	1	235	0.0775	0.65	4.0×10^{-10}	4.8×10^{-10}
4	81.1.9	15:20	390	1	235	0.0775	0.65	4.0×10^{-10}	2.8×10^{-10}
5	81.1.9	16:00	390	1	115	0.275	0.95	3.9×10^{-9}	1.3×10^{-9}
6	81.1.18	15:10	400	1	235	0.15	1.15	2.3×10^{-10}	3.2×10^{-10}
7	81.1.18	15:10	400	2	115	0.11	1.15	1.2×10^{-9}	1.2×10^{-9}
8	81.1.19	16:30	400	1	115	0.26	0.95	2.8×10^{-9}	2.0×10^{-9}
9	81.1.19	17:00	400	1	235	0.18	0.8	1.0×10^{-9}	1.5×10^{-9}
10	81.1.19	17:00	400	2	315	0.055	0.8	4.5×10^{-10}	9.6×10^{-10}

间隔为 6° 以上,所以所取采样点可能并不正好处于烟云轴线上,这造成实测浓度低于理论浓度。

(3) 中性稳定度的划分包含着一段范围,而这儿采用的扩散参数是该稳定度下野外多次试验的平均结果。针对某一次试验, σ_y 和 σ_z 可能偏大或偏小,引起计算浓度的误差。

四、讨 论

上节通过与实验资料的比较,确认了本模式的正确性,进而来讨论本模式的一些物理意义,为此改写(11)式,得:

$$\begin{aligned}
 c(x, y, z) = & \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right] \\
 & \cdot \left\{ \exp \left[-\frac{wx}{u\sigma_z^2} (z-h) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{w^2 x^2}{2u^2 \sigma_z^2} \right] \cdot \left[\exp \left(-\frac{(z-h)^2}{2\sigma_z^2} \right) \right. \\
 & \left. + \exp \left(-\frac{(z+h)^2}{2\sigma_z^2} \right) \right] \\
 & + \frac{\sqrt{2\pi} wx}{u\sigma_z} \exp \left[-\frac{2wxz}{u\sigma_z^2} \right] \\
 & \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{(z+h)}{\sqrt{2}\sigma_z} - \frac{wx}{\sqrt{2}u\sigma_z} \right] \Big\} \\
 = & \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\cdot \{A \cdot [E + F] + B\} \quad (15)$$

与传统的垂直气流可忽略的高斯模式相比较,显然在大括号中的 $[E + F]$ 项就是高斯模式中的浓度垂直分布函数。而由于垂直气流的作用,将有一个乘积因子 A 和一个和差因子 B 给予修正。

乘积因子为:

$$A = \exp \left[-\frac{wx}{u\sigma_z^2} (z-h) \right]$$

$$\cdot \exp \left[-\frac{w^2 x^2}{2u^2 \sigma_z^2} \right] = A_1 \cdot A_2$$

(16)

它可以分成 A_1 和 A_2 二部分。

显然 A_1 是由于垂直气流 w 的作用而造成的一个恒为正值的因子,如有上升气流, $w < 0$, 则:

$$A_1 \leq 1, \text{ 当 } z \leq h$$

即源高以上浓度增加,源高以下浓度减小。

如有下沉气流, $w > 0$, 则:

$$A_1 \leq 1, \text{ 当 } z \geq h$$

即源高以上浓度减小,源高以下浓度增加,其物理意义是明显的。

A_2 是恒小于 1 的正值,它反映了在不同下风距离处垂直气流对浓度大小的影响。在 x 较小时,它的值较大,对浓度值只作较小的修正。但当 x 增大时,一般来说, σ_z 的增长速率小于 x 的增长速率,所以由于平方项的

作用, A_2 值很快减小(见表 2), 致使污染浓度随着下风距离的增大而较快减低。以下沉气流而言, 这就相当于一个较低的源对远处污染较小一样。

表 2 A_2 值表 (D 稳定度)

w/u A_2 $x(\text{km})$	0.02	0.05	0.1
0.1	0.94	0.67	0.20
0.2	0.93	0.64	0.16
0.5	0.91	0.55	0.09
1.0	0.87	0.42	0.03
2.0	0.80	0.25	0.00
5.0	0.62	0.05	0.00
10.0	0.41	0.00	0.00

A_1 和 A_2 作为一个乘积因子 A 修正垂直分布函数。表 3 是当 $H = 100\text{m}$ 、 $w/u = 0.1$ 时, 在中性稳定度 (D 类) 下, A 随下风距离 x 和高度 z 的变化。从表中可以看出: 在下沉气流的作用下, 近源处的地面附近污染大

表 3 A 值表 (D 稳定度)

$x(\text{km})$ A $z(\text{m})$	1	2	3
1.5	29.02	0.92	0.07
10	16.08	0.57	0.05
20	8.03	0.33	0.03
30	4.01	0.19	0.02
40	2.00	0.11	0.01
50	1.00	0.06	0.01
60	0.50	0.04	0.00
70	0.25	0.02	0.00
80	0.12	0.01	0.00
90	0.06	0.01	0.00
100	0.03	0.00	0.00
110	0.02	0.00	0.00
120	0.01	0.00	0.00
130	0.00	0.00	0.00

大加重, 随着下风距离的增加和高度的抬升, 污染将显著减小, 并逐渐趋向于 0。这是烟

云被下沉气流压到地面附近以后的必然结果。

第二部分是:

$$B = \frac{\sqrt{2\pi}wx}{u\sigma_z} \exp\left[-\frac{2wxz}{u\sigma_z^2}\right] \cdot \operatorname{erfc}\left[\frac{(z+h)}{\sqrt{2}\sigma_z} - \frac{wx}{\sqrt{2}u\sigma_z}\right] \quad (17)$$

它是烟云在垂直扩散和垂直气流的共同作用下, 受地面边界影响所产生的对浓度的修正项, 它以和差形式加到浓度垂直分布函数上。它表明, 由于垂直气流的作用, 地面对烟云不再完全符合几何全反射原理。

表 4 下沉气流中 B 项的作用

$z(\text{m})$	前项	后项	后/前(%)
1.5	1.81	5.19	287
10	1.21	1.30	108
20	0.92	0.25	27
30	0.74	0.044	5.9
40	0.58	7.5×10^{-3}	1.3
50	0.42	1.2×10^{-3}	0.28
60	0.29	1.8×10^{-4}	0.06
70	0.18	2.6×10^{-5}	0.01
80	0.11	3.5×10^{-6}	$\rightarrow 0$
100	0.031	5.2×10^{-8}	$\rightarrow 0$
150	4.0×10^{-4}	4.5×10^{-13}	$\rightarrow 0$
200	9.3×10^{-7}	7.6×10^{-19}	$\rightarrow 0$

表 4 计算中性层结时, 100m 高架源, 在下沉气流下 ($w/u = 0.1$), 下风 1 km 处, 本项 (B) 与大括号中的前项 ($A \cdot [E + F]$) 相比的情况。从表中可以看出, 本项造成贴近地面处污染浓度成倍地增长, 而在一定高度以后, 本项作用越来越小, 并逐渐趋近于 0, 这是在下沉气流中, 烟云遇到地面边界以后所产生的结果, 而 Overcamp 的下倾烟云模式是难于反映这一特征的。

五、结 语

本文把垂直气流引进了大气扩散方程, 并正确地考虑了地面边界的作用, 从而获得了一个垂直气流中大气污染物散布的解析模

式。这个模式正确地解释了下沉气流中大气扩散的实验结果。

下沉气流必将大大加重高架源对地面附近的大气污染,这已为实验结果所证实,也由本文的理论模式所确证。

在复杂地形区域,小尺度流场经常是不水平的,所以正确地探测和估算垂直气流分量是大气污染工作者不容忽视的重要方面。

而本文的结果将为这些区域的大气污染评价提供重要的理论基础。

参 考 文 献

- [1] 施介宽等,兰州大学学报, **21**(4), 84—90(1985).
- [2] Overcamp, T., J., *J. Appl. Met.*, **15**, 1167—1171. (1976).
- [3] 黄建国等,中国环境科学, **5**(3), 19—25(1985).

地下水污染的数值模拟及应用实例

吕 贤 弼

(清华大学水利系)

地下水由于是赋存在地下孔隙介质中,人们不可能象对待地表水那样,可以直接从水的气味,颜色等现象迅速发现和判断水质是否异常以及污染的范围,而只能通过监测孔的水样分析来了解。但是,监测孔分布的密度是有限的,地下水流速又很小,所以一旦发现水质异常时,污染范围已经扩大,污染历时已经很长了。地下水污染的这样一种特殊性质使得水质模拟技术的应用显得更加重要。地下水污染的数学模拟方法中包括有黑箱模拟方法,理论解析解方法和数值模拟方法,其中以数值模拟方法应用最为普遍。本文讨论地下水污染数学模型和数值模拟方法以及有关研究动态,并就一具体实例说明数值模拟的应用。

一、地下水污染的数学模型

地下水污染的模拟,要求同时建立地下水流动的数学模型和地下水污染物运移的数学模型。

地下水流动的一般数学表达式在直角坐

标系中为:

$$S_i \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \quad (1)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

其中 h 为水头, k 为渗透系数, ε 为源汇项, S_i 为贮水率。

当水头分布已知时,可按达西定律求解流速:

$$v_i = \frac{1}{n} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

其中 v 为孔隙流速, n 为有效孔隙率。

污染物运移的一般数学表达式为

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (c v_i) + R \quad (3)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

其中 c 为污染物浓度, D 为弥散系数, v 为孔隙流速, R 为源汇项。

一般情形中污染物的浓度较低,地下水的密度和粘滞性不受污染运移过程的影响,流动模型和运移模型可以独立求解。如果出现相反的情况,则两个模型应当联合求解,此