问题讨论

浅谈环境数学的内容与体系

车 宇 瑚
（北京师范大学环境科学研究所）

环境数学，与环境化学、环境地学等学科一样，是基础环境学科的一个分支．应当指出，数学只是研究环境问题的工具和手段之一，并不能代替别的工具和手段．因此环境数学在环境科学中只应当占有一个特定的位置．研究环境问题，数学工具既非无足轻重，亦非神通万能．但是一切科学都必然经历从定性到定量、从粗略到精确的发展过程．这一规律便赋予了环境数学永不衰竭的生命之泉．

环境数学区别于数学的基本点就在于它的成果都具有环境科学的意义．这些成果只是用数学语言描述的环境问题及有关结论，通常并不是数学意义下的新成果．当然，环境问题中也可以抽象出一些新的数学课题，但一般并不引出新的数学范畴．因此，环境数学是环境科学的一个分支学科而不是数学的分支学科．所以我们也无需要区别“环境数学”与“数学环境学”两个术语的差别．环境数学与数学的关系很类似于环境化学与化学的关系．

特别应当指出，环境数学与环境系统分析是有区别的．毋庸置疑，这两者具有相当一部分共同的内容，但也有不少各自独立的内容，两者是互不包含的．前者相对于后者来讲所显示的特点在于更侧重于数学方法论．就象环境监测分析是环境化学的重要应用领域一样，环境系统分析便是环境数学的重要应用领域．环境系统分析是从系统的观点出发运用某些数学工具对气、水、土等各种特定的环境系统进行定性或定量的分析并得出关于这些特定环境系统的各种结果．这些数学工具的应用成果当然也属于环境数学的内容之列，但环境数学还有一重任务便是把这些素材总结归纳抽象出更一般的数学形式．从环境数学的观点看来是完全相同的数学形式在不同的环境系统中有不同的意义；从环境数学的观点看来是完全不同的数学形式也可以描述完全相同的环境系统．这就是说，对于环境数学与环境系统分析所共有的内容，这两者看待它们的观点也不尽相同．另外，从下面将要谈到的环境数学的内容中还可以看到其中有很多内容并不包括在环境系统分析的范畴之内．例如度量模型问题、环境数据统计处理问题、计算问题等显然都是环境数学的重要内容，而环境系统分析并不研究这些课题，只是在对某环境系统进行分析时直接引用前者在这些方面的成果．当然环境系统分析中也有很多不以数学形式表述的内容显然就不属于环境数学的范畴．从某种意义上讲，环境数学与环境系统分析的关系有点类似于应用数学与系统分析的关系．

环境数学作为一门独立学科有其特定的研究对象和特定的内容．这些内容可以组织成自己独特的体系． 本文试图就这方面的问题谈一些粗浅的认识．

环境数学的研究对象就是环境问题中存在的数学规律．环境数学的内容包括一切在环境科学中可以使用的数学工具、这些数学工具在环境科学中应用的技巧和方法以及运用这些数学工具所获得的一切环境科学的成果．因此也可以说，环境数学是一门用数学方法研究环境问题的科学．

环境数学的内容虽然很多，但总的说来可分为两大部分：数学工具和应用成果．这些内容可以按照数学的逻辑性和系统性来组织成一个体系，也就是按所涉及的数学分支学科来分类组织；还可以按照数学工具在环境科学中的应用领域来分类组织．

数学是一门古老的学科，体系完整，逻辑严密，系统性和连贯性都很强．按照数学的体系来组织环境数学的内容对于我国环境科学界数学基础薄弱的现状来说尤有重要意义．兹将目前环境科学中涉及的主要数学分支简述如下．

1．集合论　这是近代数学的一门基础学科．环境科学中直接应用的数学工具均不可缺少集合论的基础知识．而且，象集合、映射、关系等等这样一些基本概念在环境问题的研究中也有直接的应用价值．

例如，污染防治的各种措施可以组成一个集合

M，各种措施的投资费用也组成一个集合 I，各种措施的环境效益还可组成若干个集合 $E_1, E_2, \cdots, E_n$（一种措施往往有多方面的效益）。集合 M 与 I 之间决定一个映射 $f: M \xrightarrow{f} I$；集合 M 与 E_j 之间也决定一个映射 $g_j: M \xrightarrow{g_j} E_j\ (j = 1, 2, \cdots n)$。在简单的情形，集合 E_j 与集合 I 之间的对应关系有时可用函数拟合的方法来获得一个近似的解析函数形式。但一般情形都很复杂，甚至只能是离散的对应关系。这就需要应用集合论的有关知识研究这些复杂的关系才能作出一些映射 $h_j: E_j \xrightarrow{h_j} I$，而且需要研究这些映射更具体的性质、它们之间的关系以及有关的计算方法。之后才能进行费用——效益分析并作出合理的环境规划。

2. 解析几何 这是用代数方程来研究几何图形的学科。它也是一门数学基础学科，同时在环境问题中也有不少直接的应用。

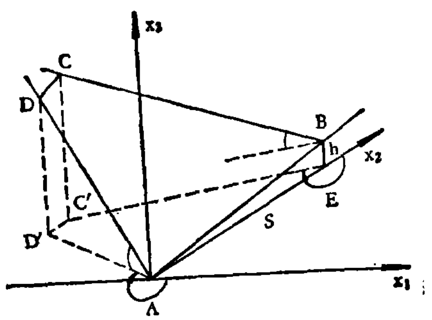


图 1 四角法坐标系统

例如，污染气象研究中需要观测并计算探空气球的空间坐标。有一种计算方法叫"四角法"，大意如下。图 1 中，A、B 为两台经纬仪的位置。两者水平距离为 s，B 对 A 的高差为 h。AD 为某时刻经纬仪由 A 点瞄向气球的视线。BC 为同一时刻由 B 瞄向气球的视线。AD 与 BC 的方向由仰角和方位角表示。由于经纬仪读数的误差，一般说来两直线在空间不相交。DC 代表垂直于 AD 和 BC 的"短线"。若短线长度不为零，可认为气球位于 DC 线上。考虑气球偏离 AD 和 BC 的距离与线段 AD 与 BC 的长度应成正比，因此用长度 AD 与 BC 的比把 DC 内分于 α 点。α 就认为是气球所处的位置。利用空间解析几何的知识可知，

$$\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{R}_1 = r_1(a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})$$
$$\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{R}_2 = r_2(b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})$$
$$\boldsymbol{DC} = \boldsymbol{R}_3 = r_3(c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})$$
$$\boldsymbol{AB} = s\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k},$$

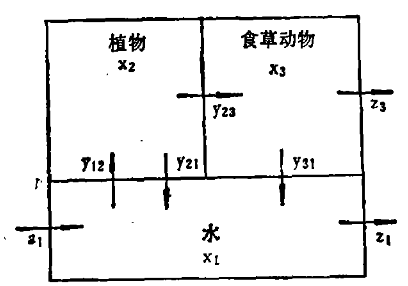
其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为坐标轴上的单位矢量。r_i 为矢量 $\boldsymbol{R}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 的模。坐标 $a_j, b_j\ (j = 1, 2, 3)$ 可由仰角与方位角计算而得。c_j 和 r_i 可由解矢量方程而得。最后便可解出气球位置（α 点的坐标）为

$$x_1 = r_1a_1 + (r_3r_1/(r_1 + r_2))c_1$$
$$x_2 = r_1a_2 + (r_3r_1/(r_1 + r_2))c_2$$
$$x_3 = r_1a_3 + (r_3r_1/(r_1 + r_2))c_3.$$

3. 数学分析 这是众所周知的重要数学基础学科。其主要内容是采用极限方法研究函数（特别是初等函数）的各种性质，建立微分和积分的概念与算法。它在环境科学中有广泛的应用。绝大部分的环境模型都离不开数学分析这一基本工具。大气污染中的正态模型、萨顿模型、烟团模型、箱式模型等等，水质模型中 BOD、DO 的解析表达式等等都是一些初等函数。获得这些初等函数大都少不了微分与积分的手段。

4. 微分方程 这也是环境问题研究中最为重要的数学工具之一。大气、水质模型几乎全部都是用微分方程的工具来建立的，这方面的文献比比皆是，无需赘述。我们来看一个生态-环境方面的例子。

研究磷(P)在一个三成份(水、水生植物种群、食草动物种群)的受控生态-环境系统中迁移转化的规律，可作出如图 2 所示的流程框图。



x_1 = 水中 P 的数量，x_2 = 植物中 P 的数量，x_3 = 食草动物中 P 的数量，a_1 = 水中 P 流入的速率，z_1 = 水中 P 流出的速率，z_3 = 食草动物中 P 流出的速率，y_{12} = 植物从水中摄取 P 的速率，y_{21} = 植物损失 P 的速率，y_{23} = 食草动物从植物中摄取 P 的速率，y_{31} = 食草动物损失 P 的速率。

图 2 磷在一个简单生态-环境系统中的行为

从图中可知三个成份中磷的数量对时间的变化率可写成如下的三个微分方程：

$$dx_1/dt = a_1 + y_{21} + y_{31} - y_{12} - z_1$$
$$dx_2/dt = y_{12} - y_{21} - y_{23}$$

$$dx_3/dt = y_{23} - y_{31} - z_3.$$

另外通过模拟实验，可得出转移速率 y_{ij}、z_k 与各成份中磷的数量 x_k 之间的关系：

$$z_1 = c_1x_1,\ z_3 = c_2x_3^2,\ y_{12} = c_3x_1x_2,$$

$$y_{21} = c_4x_2,\ y_{23} = c_5x_2x_3,\ y_{31} = c_6x_3,$$

其中参数 $c_l\ (l = 1, 2, \cdots, 6)$ 均可通过实验数据进行估计．于是便得出用微分方程组描述的系统模型如下：

$$dx_1/dt = a_1 + c_4x_2 + c_6x_3 - c_3x_1x_2 - c_1x_1$$

$$dx_2/dt = c_3x_1x_2 - c_4x_2 - c_5x_2x_3$$

$$dx_3/dt = c_5x_2x_3 - c_6x_3 - c_2x_3^2.$$

5．线性代数　这也是一门数学基础学科，主要研究线性方程组及有关问题．它在环境科学中的直接应用也相当普遍．例如，环境质量评价中广泛应用矩阵代数的知识；社会经济与环境的课题中常常出现线性方程组；欧几里德空间则是在许多环境问题中都有应用的一个基本概念．

6．概率论与数理统计　这是一门特别具有实用价值的数学学科．概率论研究随机事件出现的可能性问题．数理统计则是由实际数据来分析随机事件的规律性，它是概率理论的直接应用领域．环境问题的实践性极强，要从大量监测数据和调查数据中提取研究环境问题规律性的信息便不能离开概率统计的工具．例如数据分布规律的研究便是一项重要而基本的研究工作．一些研究表明，除正态分布外，对数正态分布与威布尔分布等也是环境数据常常遵循的分布规律．值得一提的是多元统计分析在环境评价方面也有重要应用．如主成分分析、聚类分析、因子分析等等．

7．误差理论与数据处理技术　这也是一门实用性学科．误差理论研究误差的来源、各种误差的统计特性及传播规律等．数据处理技术主要研究如何从带有误差的数据中消除误差的影响找到变量间本质关系的方法．　它们在环境科学中应用也很普遍．例如环境监测实验数据质量控制中便需研究数据的误差规律．在水质控制方面也有应用滤波技术的尝试性工作．插值法与曲线拟合则在气象与水文数据处理方面早已广泛应用了．

8．图论与结构模型　这也是对环境科学很有应用价值的数学工具．把一些因素作成点，把因素间的二元关系作成点之间的线，便得到一个“图”．图论便是研究各种图的结构性质．用图论工具建立的系统模型叫结构模型．这种模型特别对于象环境系统这样的与社会因素有关的复杂系统是一种简明而有力的工具．

例如，图3表示一个废渣处理问题的结构模型．图中 $P\bullet\xrightarrow{+}\bullet G$ 表示城市人口P的增加将直接导致垃圾量G的增加，P的减少也导致G的减少．$S\bullet\xrightarrow{-}\bullet D$ 表示保健水平S提高直接导致发病率D降低，S降低导致D升高．其他类似．　这种结构模型还可以定量化，用于预测或决策．

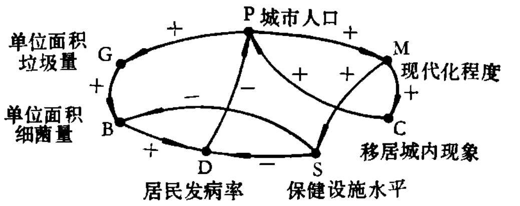


图3　某城市废渣处理问题的结构模型

9．运筹学　这门用途极广的应用数学学科主要研究如何从全局出发获取问题的最优（或最合理）决策的方法，也就是常常说的最优化方法．它主要包括规划论、排队论、存贮论、决策论、博奕论等．在环境科学中应用最多的是规划论，特别是线性规划、非线性规划和动态规划．

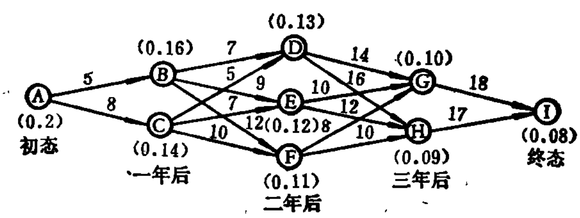


图4　动态规划图示

例如，某地 SO_2 污染浓度为0.2（毫克/米³），计划用4年时间使之达到0.08（毫克/米³）．每年可能达到的状态及备择策略均如图4所示．　其中策略 $\underset{(0.2)}{A}\xrightarrow{5}\underset{(0.16)}{B}$ 表示从初始状态 A（0.2毫克/米³）采取该策略可使第一年后污染达到状态B（0.16毫克/米³），所需费用为5万元．其他类似．问从现状A（0.2）到第4年后要求的状态I（0.08），每年各应采取哪种策略，能使四年所花的总投资费用为最少？这是一种典型的动态规划问题．用动态规划方法可解出最优决策序列为ABEGI．

10．系统、信息与控制理论　这是用途广泛的应用数学学科．它综合应用上述的各种数学基础知识和实用数学工具来建立系统模型，研究信息传输

规律和为了改善某些对象的状态而对系统施行控制的技术. 大部分环境问题可以归纳为某种环境系统的研究. 而为了达到环境目标通常都需要研究环境系统的控制问题. 例如大气污染控制、水污染控制以及能源-环境系统的预测和控制等都是环境科学的基本课题.

11. 度量理论与数量化方法 这是近十多年来发展相当迅速的一门数学学科，专门研究对一些概念如何进行度量的方法及其理论. 在物理、化学等传统学科中许多量都早已有了成熟的公认的度量. 但在环境科学及其他一些社会科学中，需要度量而又不易度量的新概念却非常之多. 这就引起人们越来越重视度量理论与方法的研究.

例如环境科学中的环境质量、生态质量、生活质量、污染的社会代价、景观损害和心理影响、资源资本和环境资本等等，这些都是亟待定量化的概念. 目前常常采取专家评分法和加权法来处理. 这样处理往往既叫人无可厚非又令人难消疑云. 于是象环境质量的度量便出现了斑驳纷纭的质量指数. 这当然都是非常有益的探索. 问题是这些工作都需要从度量理论的角度上加以总结和提高.

这里，我们用大家都熟悉的"物体的质量"这一概念来简单说明一下度量的抽象意义. 之所以对物体的质量要进行度量，首先是因为人们认识到不同的物体在质量上存在差异. 人们可以直觉地感受到某物体比另一物体重或不重. 这种差异可看成是物体集合 A 中的一种关系，记为 H. 由于人们对实数认识得非常深刻，因此总想用实数来表示物体的质量，以便使 A 中的关系 H 能用实数集合中的大小关系表示出来. 也就是说应当恰当地定义物体集合 A 到实数集合 R 的一个映射 $f: A \xrightarrow{f} R$，使得对任意的 $a, b \in A$ 有

$$aHb \Leftrightarrow f(a) > f(b).$$

另外，把两个物体 a 和 b 放在一起看作一个物体记为 $a \circ b$，表征其质量的实数应当等于原来两个物体所对应的实数之和，即

$$f(a \circ b) = f(a) + f(b).$$

符号"○"表示的是集合 A 中的一种二元运算，"+"则是集合 R 中的一种二元运算. 一般地，我们把集合 A 称为"客体集"，而把客体集 A、A 中的一些关系和 A 中的一些二元运算的联合体称为 A 的一个"关联系统". 如果两个集合之间的映射 f 能够象上面所述的那样"保持"所有的关系和运算，则称 f 为这两个集合所相应的关联系统之间的"同态"，也称这两个关联系统"同态". 所谓"度量"就是指赋予一个从客体集合 A 的关联系统到实数集合 R 的某一个特定的关联系统之间的同态.

度量的这种抽象定义对环境度量问题的研究有十分重要的指导意义. 就拿环境质量指数来说，它作为环境质量的度量，客体集合是什么？客体集合中的关系又是什么？有没有二元运算？所定义的指数能不能保持这些关系和运算？如果解决了这些理论问题，环境质量指数可能就会具有更强的说服力和更广泛的实用性. 另外，度量理论还可以引导我们开辟一些度量的新途径. 例如用区间数集合或模糊数集合来取代实数集合 R. 国内外都开始有了一些这方面的探索性工作.

12. 模糊集理论 这也是新近发展起来的新的数学分枝. 它一反经典的非此即彼的集合理论，建立起亦此亦彼的集合理论，使得对事物的数学描述更接近于人的认识规律. 虽然这门学科本身在理论上与应用上都有待于进一步提高，但它对于庞大复杂的环境问题直观上就使人感觉到必会有广阔的应用前景. 目前国内外都有人在环境单元模糊聚类、环境类型模糊识别、环境质量综合评判及环境规划等方面进行一些有益的尝试.

我们举一个模糊规划的例子. 在环境规划中常常希望得到投资费用少、资源消耗少、经济效益和环境效益都高的方案，这就是通常所说的多目标规划问题. 其数学形式为

目标：$\text{opt } z = (z_1, z_2, \cdots, z_t)$

约束：$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, i = 1, 2, \cdots, m$. 其中 $x_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为规划变元，$z_k = z_k(x_1, x_2, \cdots, x_n), k = 1, 2, \cdots, t$，为 t 个目标函数. opt 表示"最优". 模糊集理论为处理这种问题提供了一种思路. 在 t 维目标空间 $U(z_1, z_2, \cdots, z_t)$ 中恰当地定义一个模糊集合 $\underset{\sim}{A}(u) = \underset{\sim}{A}(z_1, z_2, \cdots, z_t)$ 来作为新的目标，于是上述规划问题便可转化为一个普通易解的单目标规划：

目标：$\max \underset{\sim}{A}(u)$

约束：$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, i = 1, 2, \cdots, m.$

13. 数值计算方法 凡是定量的运算都要有可行的计算方法. 特别是要有适用于电子计算机的计算方法. 环境科学中既然大量使用各种数学工具，最终就都要落实到计算方法上. 例如很多的污染模型用微分方程来表示，而很多的微分方程都不易获得解析解. 要使模型实用就必须使它能付诸计算，因此，微分方程的数值解法也就必不可少. 其它如定积分算法、矩阵运算、图论计算方法等都是环境科

学中经常需要的。

14. 电算技术　这主要指算法语言．环境问题庞大复杂使得电子计算机成为必不可少的计算工具，因此电算技术的关键—算法语言便成为环境数学的不可缺少的内容。

上面仅依笔者浅陋的见识列出在环境科学中现已涉及的主要数学学科，当然很可能还有遗漏．所涉数学学科虽然很多，但并非每门学科的全部内容都包括在内，涉及的程度也各有不同．将所涉及的内容按上述数学学科来分类并在有关部分引进相应的应用成果，便得到环境数学的一个符合数学逻辑性和系统性的、循序渐进的体系．国外近年来已出现了按这种体系讲述环境数学的著作（如文献[1]）.

环境数学的内容，特别是应用成果，还可以按不同的环境问题来分类，组织成一个对于应用很有指导意义的体系．例如分为：大气污染与控制、水体污染与控制、土壤污染与控制、能源与环境问题、发展与环境问题、环境质量评价、区域环境规划等．国外按这种体系总结环境数学的著作也有不少（如文献[2]）.

上述两种体系各有其优点，前者适于学习（掌握数学工具），后者适于工作（研究环境问题），但都没有显示环境数学作为一门独立学科的特殊层次结构．我们拟提出如下的一种体系来概括环境数学的内容，似可更好地将数学与环境二者融为一体，并更能清晰地显示各部分内容在环境数学中的地位与功能。

一、环境问题模型化

1．度量模型，研究各种量的度量问题．这是一切定量化模型的基础．

2．行为模型，就是描述环境系统行为的模型，主要是表现各因素变化的因果关系．

3．决策模型，研究为达到一定的目标而寻求或选取某种策略的方法．这是大多数环境问题研究的基本归宿．认识世界的目的是为了改造世界．行为模型是认识世界的数学工具，而决策模型便是改造世界的数学工具．

二、环境统计与数据处理

1．实验数据误差分析。

2．环境对象总体参数估计，即研究数据统计特性和分布规律．

3．建立统计模型，即利用原始数据寻求变量间的相关关系．

4．环境模型参数识别与状态估计，即从实测数据出发识别模型中的参数值并估计状态变量的值．

5．其他统计分析．如聚类分析、因子分析等．

三、环境数学计算

主要包括数值计算方法和电算技术以及各种环境问题通用计算软件。

环境数学的这种体系结构也符合用数学工具处理环境问题的基本思路和程序：首先是把所研究的问题抽象成数学模型（理论模型）然后通过监测或调查的数据来确定模型中的参数，也就是建立具体的数学模型，最后用模型进行有目的的计算，得出问题的结果．

当前，在我国，环境数学中比较突出的课题，在模型方面主要是环境经济和环境质量评价中的度量模型、环境容量模型和区域污染综合防治中的规划决策模型等．特别是环境损害的度量模型，这是从中央到地方各级政府都极为关注的一个大问题，也是关系到环境科学发展前景的重大课题．在数据处理方面主要应加强对监测数据的统计分析工作．一方面从理论上分析总结我国环境数据所表现的分布规律，另一方面应制定并普及监测数据常规统计规范．提高数据质量是提高我国环境科学水平的根本保证．

近年来，我国环境数学发展相当迅速，但总的说来水平还不高，特别是普及工作还远远不能满足需要．因此，关于环境数学的科研和教学工作应当引起有关领导部门、学术团体及高等院校的足够重视．另外，环境工作者也要加强同数学工作者的合作，使环境数学的发展开创一个新的局面．

参 考 文 献

[1] Waite, Thomas D. and Freeman, Neil J., *Mathematics of Environmental Processes*, p. 170, Heath and Company, 1977.

[2] John W. Pratt, *Statistical and Mathematical Aspects of Pollution Problems*, p. 392, Marcel Dekker, Inc., New York, 1974.