

专论与综述

用模糊集理论计算水环境综合评价指数*

容 跃 金 健

(北京师范大学地理系)

目前国内外计算水质评价综合指数的方法多用求均值、求均方根等初等数学运算来汇总由各项参数得出的分指数。评价的基本单元,一种是超标倍数(即 C_i/S_i 实测浓度/水质标准浓度),一种是根据某种用途(如饮用、农业灌溉)对水体实例浓度分级评分。但是以超标倍数为基本评价单元是否合适、综合评价计算时各种加权求值方法是否存在盲目性和偏离客观情况,这些都是需要继续深入讨论的问题。

用模糊集理论计算水质综合评价指数开辟了一个新的途径。我们在此引用模糊矩阵复合运算方法。这种方法首先对各项指标进行评价,然后考虑各项指标在总体中的地位,配以适当权重。在此基础上近似模拟人用模糊概念进行推理的过程,经过运算,得出综合评价结果。现在把综合评价的模糊数学模型介绍如下:

1. 用隶属度刻划水质分级界线

在模糊集理论中,运用隶属度来刻划客观事物中许多模糊的界线。而隶属度可用隶属函数来表达。比如环境质量评价中“污染程度”就是一个模糊概念,从而作为评价污染程度的分级标准也是模糊的。象水质分级界线就是一个模糊的界线。所以我们有必要用隶属度来描述它。现在水质分级中多采用一个简单的数字指标作为分级的界线,界线两边截然分为不同级别。例如有的地方把一级水的 DO 指标规定为 7 毫克/升,如果实际

情况是 7.1 毫克/升,则算作一级水,而 6.9 毫克/升则算作非一级水。实际上 7.1 与 6.9 相差很小。所以这样分级就不太客观。我们采用模糊的概念,用隶属度来刻划这条界线就好得多。比如我们可以说 DO 值 7.1 毫克/升时隶属一级水的程度达到 100%,而 6.9 毫克/升时隶属一级水的程度达到 95%,相应地隶属于二级水的程度就是 5%。对于其它的数值也可给予不同的隶属度。显然,这样刻划其界线要合理得多。

为了进行模糊运算,需要确定隶属函数。考虑便于计算,函数取线性的。如果 DO 指标 I 级水标准为 7.0 毫克/升,II 级水标准为 5.0 毫克/升。故 DO 对于 I 级水的隶属程度可用函数表达为:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - 5) & 5 < x < 7 \\ 1 & x \geq 7 \\ 0 & x \leq 5 \end{cases}$$

函数表达的意思是当实测值大于 7 毫

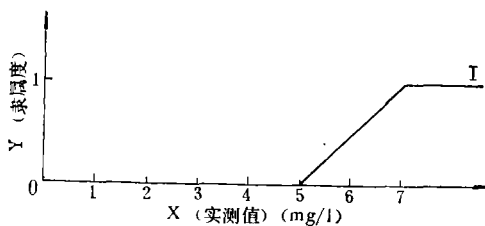


图 1

* 本文所用方法直接引自北京师范大学数学系汪培庄著《模糊集理论及其简单应用》(1979年12月)。关于取大取小值计算,理论上已有证明,不在此讨论。

克/升时, DO 对于 I 级水的隶属程度是 100%, 当实测值小于 5 毫克/升时, 对于 I 级水的隶属程度为 0. 如果 x 值介于两者之间, 对于 I 级水的隶属度就为 $\frac{1}{2}(x-5)$.

例如黑龙江省环保局在松花江水系污染现状评价中对各项指标的水质分级标准如下(为叙述简明我们仅取有机污染几项指标):

表 1

指标	单位	I 级水标准	II 级水标准	III 级水标准	IV 级水标准	V 级水标准
DO	mg/l	7.0	5.0	3.0	2.0	1.0
BOD	mg/l	1.5	2.0	3.0	5.0	8.0
COD	mg/l	2.0	3.0	5.0	8.0	10.0
酚	mg/l	0.002	0.005	0.01	0.02	0.03
CN	mg/l	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02

根据 DO 的五级标准可做出其对于五个级别的隶属函数和图形(如图 2).

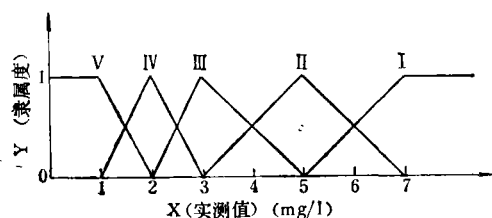


图 2

DO——I 级水

$$y_I = \begin{cases} 0 & x \leq 5 \\ \frac{1}{2}(x-5) & 5 < x < 7 \\ 1 & x \geq 7 \end{cases}$$

DO——II 级水

$$y_{II} = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-3) & 3 < x < 5 \\ -\frac{1}{2}(x-7) & 5 < x < 7 \\ 0 & x \leq 3, x \geq 7 \end{cases}$$

DO——III 级水

$$y_{III} = \begin{cases} x-2 & 2 < x < 3 \\ -\frac{1}{2}(x-5) & 3 < x < 5 \\ 0 & x \geq 5, x \leq 2 \end{cases}$$

DO——IV 级水

$$y_{IV} = \begin{cases} x-1 & 1 < x < 2 \\ -(x-3) & 2 < x < 3 \\ 0 & x \geq 3, x \leq 1 \end{cases}$$

DO——V 级水

$$y_V = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ -(x-2) & 1 < x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

其它各项指标均可按同样方法求出隶属函数。

2. 对单项指标分别进行评价

评价水体, 一般有十几项参数指标, 如果恰有一项指标超过规定标准, 评价结果如何呢? 对此一般评价方法不易作出回答, 我们先对各单项指标进行评价, 反映出单项超标情况, 然后再进行综合评价, 这样便可作出回答。

取 U 为污染物各单项指标的集合, 取 V 为水体分级的集合。比如评价水体污染, 我们可取: $U\{\text{DO、BOD、COD、酚 CN}\}$
 $V\{\text{I 级水、II 级水、III 级水、IV 级水、V 级水}\}$
 对 U 上的每个单项指标进行了评价。有实测值 x , 就可分别求出对于 I、II、III、IV、V 级水的隶属度 y , 得出一组 5 个数。例如有实测 DO 值为 2.69 毫克/升, 用上述已给 DO 对于五个级别水的隶属函数计算 y 的结果如表 2:

表 2

	y_I	y_{II}	y_{III}	y_{IV}	y_V
DO: $x = 2.69$	0	0	0.69	0.31	0

对于 BOD、COD、酚 CN 同样也可分别得出一组 5 个数。每项的 5 个数依次排列组成一个 5×5 矩阵, 称模糊矩阵, 用 $\tilde{R}$ 来表示。

如:

$$\tilde{R} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0.69 & 0.31 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.91 & 0 \\ 0 & 0.48 & 0.52 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0.67 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

矩阵第一行是U上DO对五个级别水的隶属度,第一列是U上五个单项指标分别对于I级水的隶属度。其它行列的意义类推。如果U取 n 项,则 $\tilde{R}$ 为 $n \times 5$ 矩阵。

3. 计算权重

考虑到各单项指标在总体污染中的作用,对于不同用途的水应有不同的侧重。因此对各单项指标要给予一定的权重。权重的计算可以采取请教专家,经过综合权衡,以评分的方式给出,也可以采用其它合理方法计算。

我们计算权重的方法是根据分指标的超标情况进行加权。超标多,加权重。对于总体污染状况,显然超标愈多,影响愈大,所以这种方法是符合实际情况的。

计算权重公式: $w_i = \frac{C_i}{S_i}$

C_i 为 i 种污染物在水中的浓度; S_i 为 i 种污染物某种用途水的浓度标准值。

因为单项指标在总体中权重的大小与某种用途水的单项分级标准无关,所以对于 S_i , 如果某单项指标分为五个级别,则取它们的均值:

$$S_i = \frac{1}{5} (I_i + II_i + III_i + IV_i + V_i)$$

由于DO指标与其它指标相反,其值愈大说明水质愈好。故计算时取其倒数:

$$\frac{1}{\frac{C_{DO}}{S_{DO}}} = \frac{S_{DO}}{C_{DO}} \quad (C_{DO} \neq 0)$$

为了进行模糊运算,各单项权重值还须归一化。所以:

$$\bar{w}_i = \frac{\frac{C_i}{S_i}}{\sum \frac{C_i}{S_i}}$$

考虑上面U集中五项指标,给予权重,组成一个 1×5 矩阵,也称模糊矩阵,用 $\tilde{A}$ 表示。就具体的计算步骤和过程举例如下:

根据表1计算 S_i :

$$S_{DO} = \frac{1}{5} (7 + 5 + 3 + 2 + 1) = 3.6$$

同理还可计算 S_{BOD} 、 S_{COD} 、 $S_{酚}$ 、 S_{CN} 。具体计算过程见表3:

表 3

	DO	BOD	COD	酚	CN	
C_i	2.69	2.50	7.73	0.0076	0.004	
S_i	3.6	3.9	5.6	0.0134	0.0076	
$w_i = \frac{C_i}{S_i}$	$\frac{S_{DO}}{C_{DO}} = 1.34$	0.64	1.38	0.57	0.53	$\sum C_i/S_i = 4.46$
$\bar{w}_i = \frac{C_i/S_i}{\sum C_i/S_i}$	0.30	0.14	0.31	0.13	0.12	

所以 $\tilde{A} = (0.3 \ 0.14 \ 0.31 \ 0.13 \ 0.12)$, 说明给DO的权重为0.3, BOD的权重为0.14等等。如果U取 n 项,则 $\tilde{A}$ 为 $1 \times n$ 矩阵。

4. 模糊矩阵复合运算

在进行单项评价和配以权重后,得到两个模糊矩阵 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{R}$ 。在此基础上,把 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{R}$ 进行复合运算便得出综合评价结果。模糊矩阵复合运算非常类似于普通矩阵乘法,只是将矩阵乘法运算中的“+”号改为“ $\vee$ ”号,将“.”号改为“ $\wedge$ ”号,“ $\vee$ ”为两数之中取大,“ $\wedge$ ”意为两数之中取小。

例如对于上述U、V集合,我们有 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{R}$, 用 $\tilde{A} \circ \tilde{R}$ 表示模糊矩阵复合运算,则:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} \circ \tilde{R} &= (0.3 \ 0.14 \ 0.31 \ 0.13 \ 0.12) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0.69 & 0.31 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.91 & 0 \\ 0 & 0.48 & 0.52 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0.67 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \{(0.3 \wedge 0) \vee (0.14 \wedge 0) \vee (0.31 \wedge 0) \vee (0.13 \wedge 0) \vee (0.12 \wedge 0), (0.3 \wedge 0) \\
 &\quad \vee (0.14 \wedge 0.5) \vee (0.31 \wedge 0) \vee (0.13 \wedge 0.48) \vee (0.12 \wedge 0.33), (0.3 \wedge 0.69) \\
 &\quad \vee (0.14 \wedge 0.5) \vee (0.31 \wedge 0.09) \vee (0.13 \wedge 0.52) \vee (0.12 \wedge 0.67), (0.3 \\
 &\quad \wedge 0.31) \vee (0.14 \wedge 0) \vee (0.31 \wedge 0.91) \vee (0.13 \wedge 0) \vee (0.12 \wedge 0), (0.3 \wedge 0) \\
 &\quad \vee (0.14 \wedge 0) \vee (0.31 \wedge 0) \vee (0.13 \wedge 0) \vee (0.12 \wedge 0)\} \\
 &= \{(0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0), (0 \vee 0.14 \vee 0 \vee 0.13 \vee 0.12), (0.3 \vee 0.14 \vee 0.09 \\
 &\quad \vee 0.13 \vee 0.12), (0.3 \vee 0 \vee 0.31 \vee 0 \vee 0), (0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0)\} \\
 &= \{0 \ 0.14 \ 0.3 \ 0.31 \ 0\}
 \end{aligned}$$

得出的结果是对应于集合 V 上的各项的隶属度, 即对 I 级水的隶属度为 0, 对 II 级水隶属度为 0.14 等, 结果对 IV 级水的隶属度最大, 结论: 水体为 IV 级。

用两个矩阵复合运算做综合评价的含意是: $\tilde{A}$ 中五个数是 U 上五个单项指标对于总体污染作用的权重大小, $\tilde{R}$ 中第一列是 U 上五个单项指标分别对于本项 I 级水的隶属度。在综合考虑总体对 I 级水的隶属程度时必然要考察各项分指标对 I 级水的隶属度和其在总体中的权重地位。这就是 $\tilde{A}$ 中一行与 $\tilde{R}$ 中第一列复合计算的目的。经过一番取大取小的选择, 得出总体对于 I 级水的隶属度。至于 $\tilde{R}$ 中其它各列的计算, 含意是相同的。

另外, 在模糊矩阵复合运算结果中可能出现最大值有两个的情况, 这时就要考虑次大值贴近哪个。例如:

$$(0.16 \ 0.27 \ 0.29 \ 0.06 \ 0.22) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.44 & 0.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0.55 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0.16 \ 0.29 \ 0.29 \ 0 \ 0)$$

结果中对于 II、III 级水的隶属度都是 0.29, 但对 I 级水的隶属度为 0.16, 对 IV 级水的隶属度为 0, 所以结论应更偏向 I 级水方向, 故最终结论定为 II 级水。

这种综合评价的模糊数学模型在理论上已得到证明。与目前一些计算综合评价指数的方法相比较, 我们认为有三条优点: 第一, 用隶属函数来描述水质分级的界线, 注意到了界线的模糊性。第二, 用它可对各单项指标进行评价。第三, 考虑各单项指标在总体污染作用的基础上可给予不同的权重。

环境科学日益向着定量化方向发展, 运用数学方法进行研究势在必行。对于我们这种方法如果改变一下 U 、 V 集合上的元素, 还可推广到各类综合评价问题, 特别是大系统的综合评价。如果编出程序应用电子计算机, 那将有更大的活力。我们相信运用模糊数学进行综合评价前景广阔, 并且希望能够就此推动环境综合评价的发展。