

问题讨论

布设样点的最佳几何图形

杨 新 建

(湘潭大学)

在进行环境评价、预评价,制定各项治理措施、排污标准之前,往往都要对污染源或区域环境进行某些定期的、定点的、系统的采样分析,以检测污染物的种类、数量、污染程度、影响范围,总结出污染物产生、迁移、衰减、分布的规律。在这里,选用最佳方案、合理地布设采样点,不但可以减少取样点的个数和取样量,避免因样品过多造成人力、物力的浪费,而且还可保证样品性质典型、数量充足,能较为实际地反映整个区域中污染物的分布情况。

采样点的布设有很多种方法。如棋盘式网格布点、对角线布点、蛇形布点,根据污染源集中的情况还有同心圆布点,阿基米德螺旋线布点等等。在污染物为离散型随机分布和连续性均匀分布的情况下,往往采用以面积为基准的网格布点,网格的几何图形也有一定的限制。对于边数为 n 的正多边形必须满足 $2\pi/\frac{(n-2)\pi}{n}$ 为整数的条件,这样才能

保证各个网格能完全拼合成一个整块。因此,以下的讨论限于正三角形、四边形、正六边形等几种有限的几何图形。另外为了使采样区内每个采样点能与其邻近各任意点的污染物分布情况尽量接近。既要保证较大的覆盖面积又要尽量减少角落点的遗漏。我们希望:

1. 在采样区内,网格边缘上的任意点到其邻近采样点的最远距离 $D_{\max}$ 越小越好。
2. 在采样区内,网格内所有点到其邻近采样点的平均距离 $\bar{D}$ 越小越好。

采用 $D_{\max}$ 、 $\bar{D}$ 这两个参数后我们首先对

矩形网格布点(长方形、正方形)作一比较。

将采样区划分为若干个相同的矩形方块,每个方块中心设有一个采样点,考虑在不同矩形时每个采样点具有相同的覆盖面积。以采样点为原点在一小方块内建立直角坐标系如图 1:

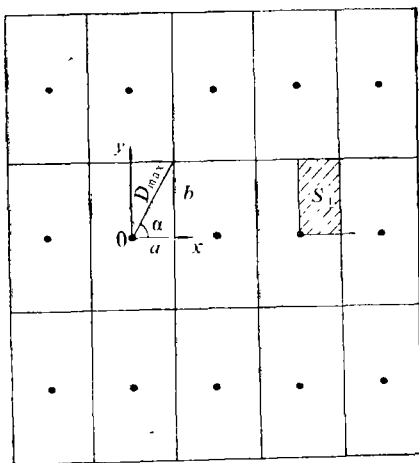


图 1 矩形网格布点

根据对称性取单个方块的四分之一来讨论,记小方块(如图)的面积为 S_1 , 边长为 a 、 b , 则:

$$S_1 = a \cdot b = a^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

小方块内任意一点到邻近采样点 0 的距离为:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2} = a \cdot \sec \alpha$$

$$= \sqrt{\frac{S_1}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \sec \alpha$$

面积 S_1 为常数则有:

$$\frac{dD_{\max}}{d\alpha} \stackrel{\text{令}}{=} 0$$

解出 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 显然当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 也就是矩形为正方形时, $D_{\max}$ 达到最小值.

$$\bar{D} = \frac{1}{S_1} \iint \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

改为极坐标后:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{1}{S_1} \iint r \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \\ &= \frac{1}{S_1} \left(\int_0^a d\theta \int_0^{r_1} r^2 dr + \int_a^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{r_2} r^2 dr \right) \\ &= \frac{1}{3S_1} \left(\int_0^a r_1^3 d\theta + \int_a^{\frac{\pi}{2}} r_2^3 d\theta \right) \end{aligned}$$

式中 $r_1 = a \cdot \sec \theta = \sqrt{S_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha} \cdot \sec \theta$

$$r_2 = b \cdot \csc \theta = \sqrt{S_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha} \cdot \csc \theta$$

代入上式后:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{1}{3S_1} \left[\int_0^a \sec^3 \theta (S_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^{3/2} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_a^{\pi/2} \csc^3 \theta (S_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha)^{3/2} d\theta \right] \\ &= \frac{\sqrt{S_1}}{3} \left[\int_0^a \sec^3 \theta (\operatorname{ctg} \alpha)^{3/2} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_a^{\pi/2} \csc^3 \theta (\operatorname{tg} \alpha)^{3/2} d\theta \right] \\ \frac{d\bar{D}}{d\alpha} &= \frac{\sqrt{S_1}}{3} \left[\int_0^a \sec^3 \theta \cdot \frac{3}{2} \right. \\ &\quad \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} (-\csc^2 \alpha) d\theta \\ &\quad + \sec^3 \alpha \cdot (\operatorname{ctg} \alpha)^{3/2} + \int_a^{\pi/2} \csc^3 \theta \\ &\quad \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sec^2 \alpha d\theta \\ &\quad \left. - \csc^3 \alpha (\operatorname{tg} \alpha)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

令 $\frac{d\bar{D}}{d\alpha} = 0$, 解得:

$$\int_0^a \sec^3 \theta d\theta = \operatorname{tg}^3 \alpha \int_a^{\pi/2} \csc^3 \theta d\theta$$

再令 $t = \frac{\pi}{2} - \theta$, 代入上式右端:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^3 \alpha \int_a^{\pi/2} \csc^3 \theta d\theta &= \operatorname{tg}^3 \alpha \int_{\frac{\pi}{2}-a}^0 \\ &\times \csc^3 \left(\frac{\pi}{2} - t \right) (-dt) \\ &= \operatorname{tg}^3 \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}-a} \sec^3 t dt \end{aligned}$$

将变量 t 重新换回到 θ 并代入原式:

$$\int_0^a \sec^3 \theta d\theta = \operatorname{tg}^3 \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}-a} \sec^3 \theta d\theta$$

由此方程可以解出 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 这说明当

矩形为正方形时, $\bar{D}$ 也达到了极小值.

采用矩形网格布点, 正方形的 $D_{\max}$, $\bar{D}$ 均为最小, 因此布点效果最好. 但是若采用其它正多边形的网格布点, 其效果是否可能会更好一些. 下面我们同样假定每个采样点的覆盖面积 S 仍然保持不变的情况下, 对正三角形、正四边形、正六边形作一比较.

首先讨论正三角形. 由于图形的对称性, 仅取一个正三角形的 $\frac{1}{6}$ 计算. 如图 2 所示,

采用极坐标求 $\bar{D}$ 值如下:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{1}{S/6} \iint \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \frac{6}{S} \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{r(\theta)} r^2 \cdot dr \end{aligned}$$

式中 $r(\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} d \right) \cdot \sec \theta$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin 60^\circ$$

d ——等边三角形边长

由上式可以解出:

$$\bar{D} = 0.4036 \cdot \sqrt{S}$$

$$D_{\max} = \frac{d}{2} / \cos 30^\circ = 0.8774 \sqrt{S}$$

同理, 对于正方形, 取其 $\frac{1}{8}$ 计算, 如图 2

中的坐标系:

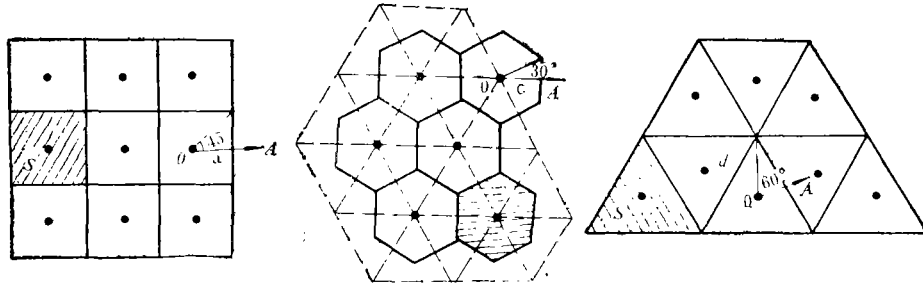


图 2 三种正多边形网格的几何图形

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \frac{1}{S/8} \iint \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \frac{8}{S} \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{r(\theta)} r^2 dr\end{aligned}$$

式中 $r(\theta) = a \cdot \sec\theta$

$$S = 4a^2$$

a ——正方形边长的一半。

由上式同样可以解出：

$$\bar{D} = 0.3826 \cdot \sqrt{S}$$

$$\bar{D}_{\max} = a / \sin 45^\circ = 0.7071 \sqrt{S}$$

对于正六边形网格布点，先用等边三角形划分，各三角形的交点即为正六边形的中心采样点（见图 2），根据对称性取每个六边形的 $\frac{1}{12}$ 计算：

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \frac{1}{S/12} \iint \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \frac{12}{S} \int_0^{\pi/6} d\theta \int_0^{r(\theta)} r^2 dr\end{aligned}$$

式中 $r(\theta) = c \cdot \sec\theta$

$$S = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c^2$$

c ——六边形内小直角三角形底边的边长由上式可以解出：

$$\bar{D} = 0.3771 \sqrt{S}$$

$$D = c \cdot \sec 30^\circ = 0.6204 \sqrt{S}$$

将以上各计算结果整理出下表：

通过矩形的求极值分析（其它三角形与

表 1 覆盖面积 S 相同时，各种几何图形的 $\bar{D}$ 、 $D_{\max}$ 值比较

几何图形 数 值 参 数	等边三角形	正方形	正六边形
$\bar{D}$	0.4036	0.3826	0.3771
$D_{\max}$	0.8774	0.7071	0.6204

等边三角形的分析比较与之类似故不再赘述)，对几种正多边形的计算我们可以看出：在以面积为基准的网格布点几何图形中，正多边形边数越多、图形越接近圆形时，其采样点的覆盖率越高。由此看来在可能完全拼合成整块的网格图形中，正六边形 $\bar{D}$ 、 $D_{\max}$ 值最小，其采样点更接近于邻近各点污染物的分布情况。另外，当保证采样区任意点的 $\bar{D}$ 、 $D_{\max}$ 分别相同的情况下，正六边形网格布点的每个取样点有最大的覆盖面积（见表 2）。

表 2 $D_{\max}$ 、 $\bar{D}$ 相同时，各种几何图形覆盖面积比较

几何图形 覆盖 面积 参 数	等边三角形	正方形	正六边形
$\bar{D}$ 相同时	6.1390	6.8314	7.0321
$D_{\max}$ 相同时	1.2990	2.0000	2.5981

由于正六边形在相同 $D_{\max}$ 、 $\bar{D}$ 下的覆盖面积最大，故所需采样点个数最少，这对于长时期、大规模定点采样的场合、其经济上的效

（下转第96页）

注 意 废 干 电 池 公 害

在燃烧处理废电池时产生一种含汞废气排到大气中去。日本大气中汞含量虽然还没有超过环境基准,但已作为一种新的污染物质引起日本环境厅的注意。1984年日本东京都公害研究所曾对垃圾处理厂的烟囱废气作过分析,发现每立方米气体中含汞1毫克。

近年来电气设备发展迅速,干电池用量日益增多。一节普通电池一般含汞0.2—1.7g,日本每年

消费约20亿个电池,废电池的汞总量相当可观。虽然环境厅号召人们收集集中处理,但散失到土壤、污水、垃圾中的废电池仍然很多。其中流失的汞有些经细菌作用将转化成剧毒的有机汞,对人类和动植物都有危害。我国干电池消费量在迅速增长,对废电池的处理问题要引起重视。

(江苏省无锡县农科所 邹志伟 供稿)

BYW-1、BGW-1 型微孔曝气器在京通过鉴定

由北京市政设计院、中科院地质研究所、江苏宜兴大塍水处理设备厂等单位共同协作研究的BYW-1、BGW-1型微孔曝气器,于1985年12月21日在北通过技术鉴定,该产品填补了国内空白。

目前我国污水生物处理所用曝气装置多采用多孔管、双螺旋和射流器等,其氧利用率、标准氧动力

效率等技术指标较低。BYW-1、BGW-1型微孔曝气器氧利用率及标准充氧动力效率分别为20—26%和5.6Kg O₂/KW·h,比普遍采用的多孔管分别提高5倍和4倍以上。此类产品的开发对污水处理厂

的节能有重大意义。

(本刊讯)

新 书 介 绍

李宗恺等编辑的《空气污染气象学原理及应用》一书已由气象出版社出版。该书主要内容为:大气湍流、大气扩散、污染沉积理论以及微气象学原理;平原、城市和复杂地形条件下的空气污染浓度计算、规划设计、环境影响分析和空气污染预报等应用问

题,重点在局地 and 城市尺度的大气扩散和空气污染问题。《空气污染气象学原理及应用》可供从事环保事业的科技人员及高等学校大气物理及环境保护等专业师生参考。

(本刊讯)

(上接第85页)
益则更为明显得多。

如在1 km²的区域内以面积为基准均匀布点,当采样点定为100个时,每个采样点的覆盖面积 S 为 $10^6 \text{ m}^2 / 100 \text{ 个} = 10^4 \text{ m}^2 / \text{个}$,采用正三角形(或正方形)网格布点,其 $\bar{D} = 40.36(38.26) \text{ m}$, $D_{\max} = 87.74(70.71) \text{ m}$,而用正六边形布点 $\bar{D}$ 只有37.71 m, $D_{\max}$ 只有62.04 m。显然正六边形布点的效果要好得多。反之,若让正六边形的 $\bar{D}$ 、 $D_{\max}$ 达到正三角形(正方形)的 $\bar{D}$ 、 $D_{\max}$ 值时,即在相同的布点效果之下,正六边形有更大的覆盖面

积。如正六边形 $\bar{D} = 40.36(38.26) \text{ m}$,则每个样点的覆盖面积可达 $11455(10294) \text{ m}^2$,只需布点88(97)个,节省费用约12%(3%),当正六边形 $D_{\max} = 87.74(70.71) \text{ m}$,则每个样点的覆盖面积 S 为 $20001(12990) \text{ m}^2$,只需设样点50(77)个,节约费用50%(23%)。

最后应当说明的是,以面积为基准的最优化设点问题实际上并不局限于环境监测分析之范畴,本文有关布点最优化几何图形的讨论,对于化工设备中孔眼匀布,地质勘测中定点钻探等工作也有一定的参考价值。