

研究报告

中小河流污染带二元数学模型论述 及其应用

陈鸣钊 丁训静

(华东水利学院)

一、天然河流素流扩散方程式 简化解析解

一个水体可以被视为一个系统,在此系统之内有很多物质源,每一个源都有一定浓度,但所有的浓度之和都不会影响到水的密度,即 $\rho = \text{常数}$. 该水体的浓度随坐标和时间而变化, $C = C_1(x, y, z, t)$. 对于天然河流来讲,素流扩散基本方程式是由著名的弗克分子扩散定理推广而得出.

弗克分子扩散定理:

$$\vec{F}_A = \rho C_A \vec{q} - \rho D \nabla C_A \quad (1)$$

式中 $\vec{F}_A$ 为 A 物质的通量; $\rho C_A \vec{q}$ 为平流通量; $\rho D \nabla C_A$ 为扩散通量.

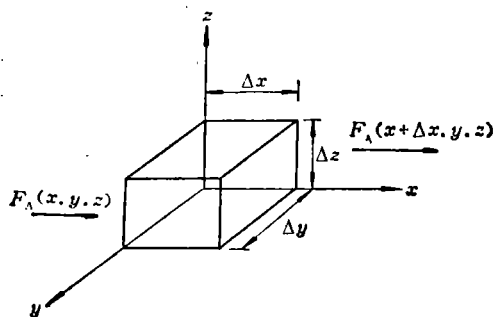


图1 三维水体

对于一个三维坐标上的一块水体 A (见图1), 可以写出质量守恒方程式:

在每一个平面上质量通量的总和 + 化学及生物作用产生的质量通量 = A 的质量在容

积里随时间的变化, 写成公式为:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial(F_A)_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{\partial(F_A)_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \\ & - \frac{\partial(F_A)_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z + r_A \Delta x \Delta y \Delta z \\ & = \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

即:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \vec{F}_A = r_A \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)得到:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \vec{q} \nabla C_A = D \nabla^2 C_A + \frac{r_A}{\rho} \quad (3)$$

这就是著名的水流对流扩散基本方程式 (Advective Diffusion)(1)~(3) 式中的符号:

ρ 为混合溶液密度,

$$\rho = \frac{(A+B)\text{质量}}{(A+B)\text{容积}};$$

C_A 为 A 物质浓度,

$$C_A = \frac{A\text{质量}}{(A+B)\text{质量}};$$

ρ_A 为 A 物质密度,

$$\rho_A = \frac{A\text{质量}}{(A+B)\text{容积}}, \rho_A = \rho C_A;$$

D 为分子扩散系数;

∇ 为微分算符;

r_A 为 A 物质化学变化质量;

$\vec{q}$ 为溶液的混合平均速度.

在天然河流紊流的情况下,可将式(3)演变为紊流扩散基本方程式,得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[(E_x + D) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[(E_y + D) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[(E_z + D) \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right] - K \bar{C} \end{aligned} \quad (4)$$

对于天然河流来讲,可对式(4)作如下简化:

(1) 一般讲 $E \gg D$, 故可以忽略 D 的影响(式中 E 为紊流扩散系数)。

(2) 对于恒定均匀流来讲, $\bar{q} = u$ (常数)。

(3) 由于边界层结构的存在, 浓度等值线分布在 x 方向比尺总是远远大于 y 方向比尺, 即 $x \gg y$ 呈细长形态。

(4) 由于大多数天然河流都是宽浅河流, 河宽 $B \gg$ 水深 h , 因而垂直混合比尺 T_v 要远远小于横向混合比尺 T_l , $T_v \ll T_l$, 则可以把点源排入河流后立即看作一个线源。

通过上述四个方面简化及给出边界条件后, 对于连续排放点源可得到式(4)的简化解析解(具体推导因篇幅所限从略):

$$C(x, y) = \frac{W}{\rho 2 \sqrt{\pi x u E_y}} e^{-\frac{u y^2}{4 x E_y}} \quad (5)$$

式中 W 为 A 物质的投放总量; ρ 为混合溶液的密度; x 为沿河流纵向坐标; u 为河段平均流速; E_y 为沿河流横向扩散系数; y 为沿河流横向坐标。

二、天然河流二元污染带数学模型

污水进入天然河流后, 立即由于浓度上的差别产生清浊分明的污染带, 污染带的存在取决于浓度上的差别大小及河宽、流速等

因素。在大河中污染带长度 L 可达很远的距离。

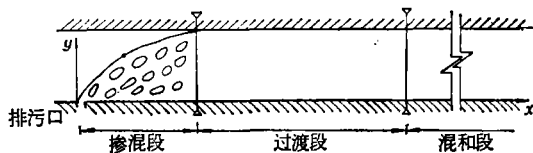


图2 排入河流的污水扩散分段示意图

一个排污口的污水进入河流后的稀释混合过程为三个阶段(见图2)。第一段叫掺混段, 即污水从排污口出来后达到对岸(对小河而言)或污染带质量中心达到平行于河流水流方向(对大中河流而言)。在这一段范围之内, 污水与河水激烈掺混。第二段叫过渡段, 即介于掺混段与完全混合段之间的部分。该段是污染物质的浓度继续扩散段。第三段叫完全混合段。该段中的污水浓度横向分布已趋于均匀。

由于污染物质经过扩散, 在第三段中全断面浓度已趋于均匀, 即 $\frac{dC}{dy} = 0$, 所以可用一元水质模型来求解; 第一、二段情况比较复杂, 必须用二元数学模型来求解。

污染带的数学模型求解了污染带沿程分布范围的曲线, 即污染带扩散的轨迹 $x = f(y)$ 的方程式(见图2), 求解了污染带内任意一点的浓度数值。

根据第一节中的天然河流紊流扩散基本方程式及其简化解析解, 在前述四个简化条件下, 通过一系列水力学原理及数学变换得到如下数学模型:

1. 污染带扩散轨迹的数学模型

$$x = \beta y^2 / (n \cdot R^{5/6}) \quad (6)$$

式中 β 为污染带特性系数。根据不同的河流水文特征及污染物质扩散特性定出; y 为沿河流横向坐标; x 为沿河流纵向坐标; n 为该河段的糙率系数, 可查水力学中糙率表; R 为该河段的水力半径。宽浅河流可用平均水深代替。

2. 污染带之内污染物尚未达到对岸时 (对于中小河即是掺混段内, 对于大中河流则包括过渡段在内) 求任意 (x, y) 坐标点浓度的数学模型:

$$C(x, y) = \left\{ C_m + C_0 \left[\frac{1}{16\sigma} + \frac{1}{8\sigma} \sum_{N=1}^{\infty} \cos \frac{N\pi}{8\sigma} y \cdot \exp \left(-\frac{(N\pi)^2}{128} \right) \right] \right\} \exp \left(-\frac{Kx}{u} \right) \quad (7)$$

式中 C_m 为污水流入前天然河道中均匀混合的污染物质浓度 (在起始断面即是河流本底浓度); N 为选取项数. 一般当 $N = 8$ 时, 精度已足够; C_0 为污水流入河流后起始浓度.

当污水为中心排放时, $C_0 = \frac{2Q}{\rho u}$; 当污水为岸

边排放时, 则 $C_0 = \frac{\partial Q}{\rho u}$; $Q = \frac{q'_0(C'_0 - C_m)}{h}$;

q'_0 为排污口出口流量; C'_0 为排污口浓度; h 为污水排入河流后的河流水深; σ 为标准差,

$\sigma = \sqrt{2E_y \frac{x}{u}}$; E_y 为横向扩散系数; x 为沿

河流纵向坐标; u 为天然河流平均流速 (若排污口具有一定宽度和排放角度时, σ 尚须加以修正); K 为污染物质降解系数; y 为沿河流横向坐标.

对于中小河流来说, 由于污染带之沿伸

距离相对来说比较短, 传播时间也不长, 在污染带范围内生物和化学降解很小或相对来说很小, 所以式(7)中 $\exp \left(-K \frac{x}{u} \right)$ 项可以忽略, 但对于大河不可忽略.

三、实测资料验证

为了验证上述数学模型的实际应用价值, 笔者与有关人员在 1981 年 9 月及 12 月分别对 C 河中各种污染物质进行了必要的监测, 获得一些实测资料, 监测情况如图 3 所示.

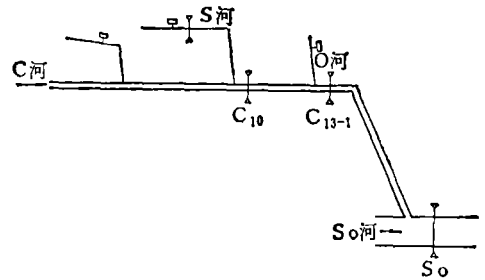


图3 C河监测断面布设示意图

1981 年 9 月我们对污染带扩散轨迹 (BOD) 进行了观测并对式(6)进行了校验, 结果见表 1.

表 1 污染带扩散轨迹验证表

观测河段 位 置	污染带 颜 色	流量 $Q \left(\frac{m^3}{s} \right)$	河面宽 $B(m)$	断面面积 $A(m^2)$	平均水深 $\bar{h}(m)$	平均流速 $\bar{v} \left(\frac{m}{s} \right)$	河段糙率 (n)	实测距离 (m)	计算距离 (m)	误差 (%)
G厂排入S河	黑	0.204	2.85	1.22	0.428	0.167	0.025	70.0	70.3	+0.43
Sh河排入C河	黑	0.735	3.96	3.42	0.864	0.186	0.025	78.5	75.5	-3.82
O河排入C河	棕黄	1.153	5.71	2.91	0.510	0.202	0.033	180.9	184.6	+2.05

注: 表内计算所用公式中的 β 取为 0.1066 (由实测资料反推, 仅适用该河).

1981 年 12 月我们对污染带内任意点 BOD 浓度进行了观测, 并用式 (7) 预报污染带内任意点 (x, y) 的 BOD 浓度与实测浓度进行了校核, 结果见表 2.

四、结 语

天然河流二元污染带数学模型从理论上

讲应该是大、中、小河流都可普遍应用的公式. 但由于观测资料范围的限制, 在应用于其它河流时尚须由各河流的实测资料来推求该模型中所需的参数并进行验证.

该数学模型通过对 C 河 1981 年 9 月的实测资料验证, 可看出污染带扩散轨迹的实测值与理论计算值非常接近, 相对误差最大

表 2 污染带内任意点 (x, y) BOD 浓度验证表

观测河段位置	污染带颜色	测点编号	实测 BOD 值 (mg/l)	模型计算 BOD 值 (mg/l)	绝对误差	相对误差(%)
C 河流入 S_0 河 (观测 7 天数值)	黑色	1	0.8	2.4	-1.6	-250.0
	黑色	2	11.0	33.9	-22.9	-208.2
	黑色	3	12.9	26.7	-13.8	-108.0
	黑色	4	25.9	18.2	7.7	93.0
O 河流入 C 河 (观测 7 天数值)	棕黄色 (下同)	5	7.8	2.1	5.7	73.1
		6	10.8	18.3	-7.5	-69.4
		7	14.0	20.8	-6.8	-48.6
		8	7.8	4.1	3.7	47.4
		9	13.8	7.4	6.4	46.4
		10	7.8	4.3	3.5	44.9
		11	116.3	160.4	-44.1	-37.9
		12	27.9	38.3	-10.4	-37.3
		13	36.7	48.8	-12.1	-33.0
		14	146.8	98.7	48.1	32.8
		15	28.2	37.0	-8.8	-31.2
		16	5.8	4.0	1.8	31.0
		17	29.6	20.5	9.1	30.7
		18	7.5	5.5	2.0	26.7
		19	16.1	19.9	-3.8	-23.6
		20	11.7	14.4	-2.7	-23.1
		21	124.6	147.6	-23.0	-18.5
		22	45.3	53.3	-8.0	-17.7
		23	72.4	84.0	-11.6	-16.0
		24	94.0	107.6	-13.6	-14.5
		25	15.1	16.9	-1.8	-11.9
		26	238.5	210.6	17.9	11.7
		27	17.2	18.9	-1.7	-9.9
		28	31.4	29.1	2.3	7.3
		29	42.6	40.2	2.4	5.6
		30	31.4	33.1	-1.7	-5.4
		31	53.0	54.9	-1.9	-3.6
		32	26.6	26.1	0.5	1.9
		33	37.4	38.1	-0.7	-1.9
		34	19.4	19.6	-0.2	-1.0
		35	28.2	28.2	0	-0.4

注：表内所用公式中的横向扩散系数 E_y 的计算式，系由 1981 年 9 月的资料验证公式(6)所取得的求 E_y 值公式，应用于本次进行校验。

为 -3.82%，说明该数学模型反映了客观规律。

应用该数学模型对 C 河流入 S_0 河所形成的污染带内任意点 (x, y) 的 BOD 浓度进行预报并与 1981 年 12 月实测污染带内相应点 (x, y) 的 BOD 浓度进行校核，预报值与实测

值相当符合，相对误差在 50% 以内的点据占 82.9%。所以，应用该模型预报污染带内任意点 (x, y) 的 BOD 浓度能够满足环境工程上的需要。另外，从图 4 来看，计算值与实测值的相关系数 r_1 为 0.941，说明两者相关较为密切。

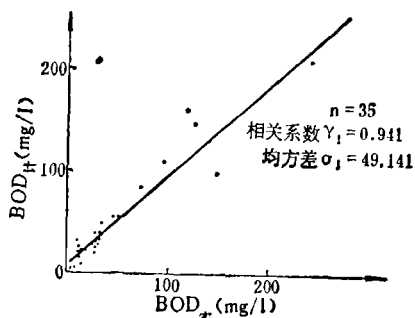


图 4 污染带内任意点实测值与计算值对比图

该数学模型应用起来十分方便,公式的函数形式简单(仅涉及初等函数),特别是对于进一步深入研究污染物质稀释自净规律时,应用该数学模型可以求得积分解析解,从而避免进行繁重的数字积分的工作。对于河流污染的治理做系统最优分析时,应用该数学模型可便于做线性规划或动态规划。

研究天然河流稀释自净规律时,通常所应用的是一元模型,其应用条件是全断面完

全混合以后的河段。因此假定污水由排污口进入河流后很快就完全混合。但实际上在达到完全混合之前尚有掺混段和过渡段存在。一元模型所忽略河段的稀释扩散规律可用该二元数学模型得到。它填补了这一段的空白。

我国工业城市的排污现状多数是利用原有天然河道或人工渠道,而且排污口十分密集,前一排污口排入河流后的污水浓度在河中稀释扩散尚未达到全断面混合,又有第二个排污口排出污水汇入,因而稀释扩散规律较为复杂。该二元数学模型的建立为解决这一问题打下了基础。

参 考 文 献

- [1] 李行伟,环境水力学及其应用,华东水利学院,1981年。
- [2] 菲赫金哥尔兹,微分方程教程,人民教育出版社,1953年。
- [3] 潘维栋,数理统计方法,上海教育出版社,1980年。
- [4] 张书农,河流动力学,华东水利学院,1957年。

汽车排出气的污染控制*

金文才 执笔

(冶金部贵金属研究所)

一、前 言

大气污染是当前环境污染的主要方面之一,而汽车排放的有害物质在大气污染源中占有很大的比例,特别是在汽车产量及保有量较多的国家更是如此。1940年洛杉矶市发现有浅兰色的光化学烟雾^[1],1971年东京首次发生光化学烟雾^[2],就是由汽车排放物所造成的。

控制汽车排放污染物的主要方法有废气

再循环法、洗涤法、再燃法、催化法等,比较成功而实用的方法是催化法。

二、催 化 剂

催化剂的外型为腰圆柱形,如图1所示。催化剂的主要尺寸及物性如下:

外型 (mm): $(R52.2 + 70.3) \times 96$

体积 (cm³): ~ 1500

* 参加催化剂研制的主要人员有阙振寰、杨汝琳、李毅民、李良果、蒋竹风、徐德信、史光亚等同志。